Propagation d'incertitude en mécanique des fluides compressibles

G. Poëtte † B. Després † D. Lucor ‡

† *Commissariat à l'Énergie Atomique / DAM Île de France Bruyères-le-Châtel*

‡ *Laboratoire de modélisation mécanique de Paris VI*

gael.poette@mines.inpl-nancy.fr

4 Octobre 2007

Contexte

- Système de lois de conservation :
$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \text{ avec } u \in \mathbb{R}^n,$$
muni d'un couple entropie-flux d'entropie $(s, g) \in \mathbb{R}^2 \Longrightarrow$ i.e. système hyperbolique.
- Soit $\xi \in \Omega$ une variable aléatoire (**paramètre incertain**) et Ω le support de ξ :
$$u(x, t, \xi).$$
- *Théorème de Cameron-Martin* (**généralisation du théorème de Weierstrass**) *:* Soit $u(\xi) \in L^2(\Omega)$ c'est-à-dire tel que
$$\int |u(\xi)|^2 \mathrm{d}_w \xi < \infty$$
et $(\phi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ la base des polynômes d'Hermite et $\mathrm{d}_w \xi = \frac{1}{d\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi - m}{d}\right)^2} \mathrm{d}\xi$ alors
$$\int |u(\xi) - \sum_{i=0}^{P} u_i \phi_i(\xi)|^2 \mathrm{d}_w \xi \longrightarrow 0 \text{ quand } P \longrightarrow 0$$
avec
$$u_i = \int u(\xi) \phi_i(\xi) \mathrm{d}_w \xi.$$
- Généralisation : Askey scheme (SISC 2002 Xiu, Karniadakis 2002), arbitrary pdf (X.Wan, Karniadakis 2005 et Witteveen,Bijl 2006),...
- Pour simplifier, dans ce qui suit : ξ est une loi uniforme de moyenne 0 sur $[-d, d]$ et $w(\xi) = \frac{1}{2d}$.

Pourquoi le choix de l'approche polynomiale ?

- Objectif de l'étude : éviter les méthodes de "Brute Force" (MC, N runs en parallèle...).

- But : Obtenir $u(x,t,\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(x,t)\phi_i(\xi)$ avec $u_k(x,t) = \int u(x,t,\xi)\phi_k(\xi)\mathrm{d}_w\xi$.

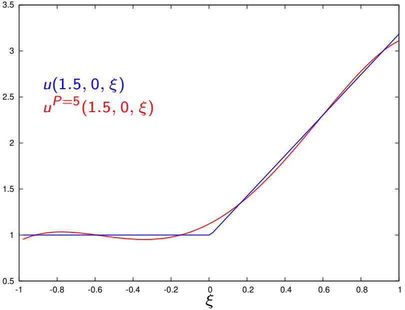
-Intérêts :

- Découplage variables classiques (x,t) et variables incertaines ξ.
- Accès immédiat à tous les moments stochastiques à partir des moments polynomiaux (u_0,$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{\infty} u_i^2 \left\langle \phi_i^2 \right\rangle$, skewness et kurtosis...).
- Accès à la fonction densité de probabilité (pdf) et donc aux quantiles.
- Accès rapide aux indices de Sobol .

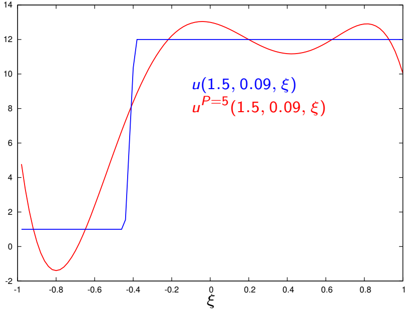
- Amont : Choix de ξ et donc de $(\phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ $\longrightarrow$ Pré-traitement.
- Aval : Moments stochastiques, indices de Sobol,...$\longrightarrow$ Post-traitement.
- Phase intermédiaire =propagation d'incertitude=cadre de mes travaux $\longrightarrow$ EDP sur les $(u_i(x,t))_{i\in\mathbb{N}}$.

G. Poëtte

- En pratique : développement tronqué à l'ordre P.
- Système hyperbolique de lois de conservation $\Longrightarrow$ Discontinuités $\Longrightarrow$ phénomène de Gibbs.
  Les résultats peuvent sortir du domaine de validité des équations (densité$<$0 par exemple)
- Exemple : l'équation scalaire de Burgers.



t=0, x=1.5



t=0.09, x=1.5

FIG.: $u^{P=5}(1.5, t, \xi) = \sum_{i=0}^{5} u_i(1.5, t)\phi_i(\xi)$ et solution analytique $u(1.5, t, \xi)$ (1000 m, variance=0.2).

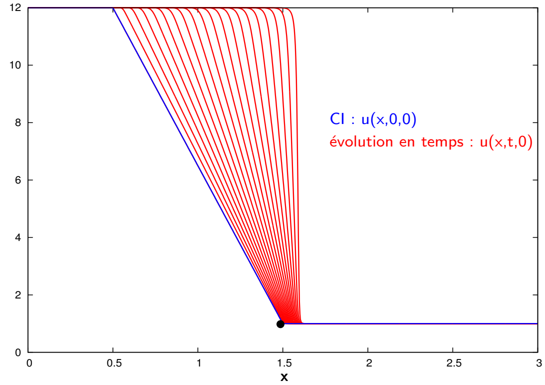
$\longrightarrow$ Problème déjà étudié par G. Karniadakis *et al.* et O. Lemaitre *et al.*

Problème simplifié : Burgers

- Équation de Burgers déterministe :

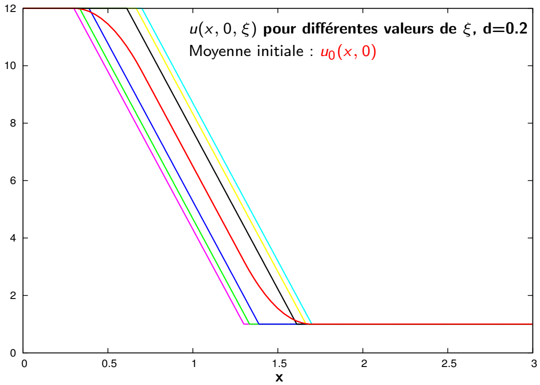
$$\partial_t u + \partial_x \frac{u^2}{2} = 0,\, u \in \mathbb{R}$$

- Résolution numérique (schéma de Roe sur la figure, 1000 mailles) :



Équation de Burgers avec incertitude

- Incertitude sur l'interface (on perturbe sa position : $u(x,0,\xi) = u^0(x-\xi)$).



- Choix simple de l'incertitude $\Longrightarrow$ solution analytique accessible.
- Quelque soit la méthode considérée il faut définir, analyser et résoudre un nouveau système décrivant l'évolution de

$$u_k(x,t) = \int u(x,t,\xi)\phi_k(\xi) d_w\xi, \ \ \forall k \in \{0..P\}.$$

Système de lois de conservation tronqué

- Système de lois de conservation hyperbolique :

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \text{ où } u(x,t,\xi) \in \mathbb{R}^n.$$

- Variable principale tronquée : $u(x,t,\xi) = \sum_{i=0}^{P} u_i(x,t)\phi_i(\xi)$ et par projection de type Galerkin

$$\partial_t U + \partial_x F(U) = 0$$

avec

$$U = \int u \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \dots \\ \phi_P \end{pmatrix} dw \qquad F(U) = \int f(u) \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \dots \\ \phi_P \end{pmatrix} dw.$$

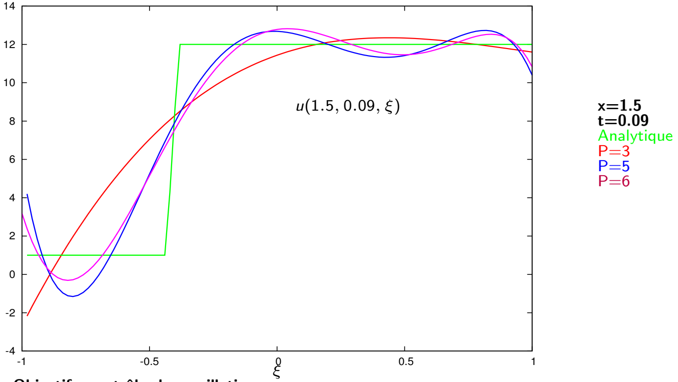
- Fermeture du système tronqué : $\boxed{u(x,t,\xi) = \sum_{i=0}^{P} u_i(x,t)\phi_i(\xi)}$.

- Cela donne un système intrusif.

Résolution numérique de Burgers tronqué

- Application à Burgers ($\left\langle \phi_k^2 \right\rangle = 1 \forall k \in \{0..P\}$) :

$$\partial_t \begin{pmatrix} u_0 \\ \dots \\ u_P \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\partial_x \begin{pmatrix} \sum_{i,j=0}^{P} u_i u_j c_{i,j,0} \\ \dots \\ \sum_{i,j=0}^{P} u_i u_j c_{i,j,P} \end{pmatrix} = 0 \text{ où } c_{i,j,k} = \left\langle \phi_i \phi_j \phi_k \right\rangle .$$



- **Objectif : contrôler les oscillations.**

La variable adjointe

On s'inspire du cadre théorique de Ruggeri-Müller (Rational Extended Thermodynamics) qui repose sur l'utilisation de la variable adjointe :

- Système de lois de conservation hyperbolique quelconque 1D :
$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0, \qquad u, f(u) \in \mathbb{R}^n \text{ avec le couple } s, g \in \mathbb{R}.$$

- **Définition** de la variable adjointe : $v = \nabla_u s(u) \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow$ Bijections $v \longrightarrow u(v)$ et $u \longrightarrow v(u)$.

$\Longrightarrow$ **La variable adjointe devient notre variable principale dans le développement polynomial :**

$$\boxed{v(x,t,\xi) = \sum_{i=0}^{P} v_i(x,t)\phi_i(\xi).}$$

- Remarque théorique :
  - Transformées polaires (s^*, g^*) de (s, g) :
    - $s^*(v) = \langle u(v), v\rangle - s(u(v)),$
    - $g^*(v) = \langle f(u(v)), v\rangle - g(u(v)).$

  qui forme un couple entropie-flux d'entropie pour le système adjoint.

  - **Définition** S et S^* pour le système tronqué :
$$S(U) = \int s(u)\mathrm{d}w,$$
$$S^*(V) = \int s^*(v)\mathrm{d}w.$$

Méthode aux moments polynomiaux

- Choix d'une entropie $\Longrightarrow$ variable adjointe $v = \sum_{i=0}^{P} v_i \phi_i \Longrightarrow$ bijections $u(v)$, $v(u)$.

  Choix de l'entropie $\Longrightarrow$ Contrôle des oscillations

- Système issu de la méthode aux moments, $u(x,t,\xi) = u(v(x,t,\xi))$:

$$\partial_t \begin{pmatrix} \int u\left(\sum_{i=0}^{P} v_i(x,t)\phi_i(\xi)\right)\phi_0(\xi)w(\xi)d\xi \\ \dots \\ \int u\left(\sum_{i=0}^{P} v_i(x,t)\phi_i(\xi)\right)\phi_P(\xi)w(\xi)d\xi \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} \int f\left(u\left(\sum_{i=0}^{P} v_i(x,t)\phi_i(\xi)\right)\right)\phi_0(\xi)w(\xi)d\xi \\ \dots \\ \int f\left(u\left(\sum_{i=0}^{P} v_i(x,t)\phi_i(\xi)\right)\right)\phi_P(\xi)w(\xi)d\xi \end{pmatrix} = 0$$

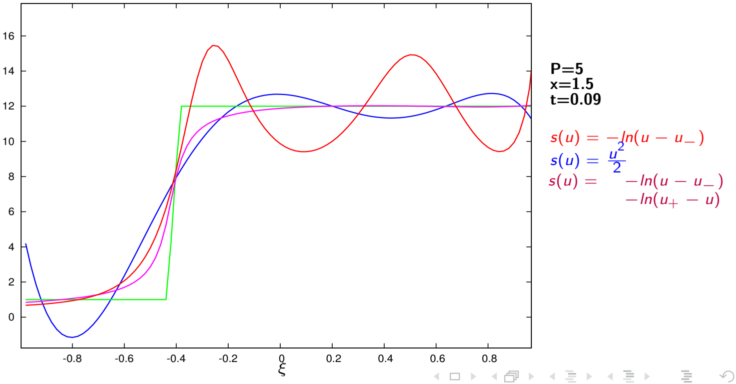
- Comme la fermeture est différente, on obtient un nouveau système intrusif.
- $\rightarrow$ U=transformation non linéaire de $V \Longrightarrow$ calcul des V_i^n ?
  $\rightarrow$ cadre théorique Ruggeri-Müller $\Longrightarrow$ minimisation de la fonctionnelle (transformée de Legendre de l'entropie) :
  $$T(V) = -\langle U, V\rangle + \langle U(V), V\rangle - S(U(V)).$$
- En pratique : Travail important effectué pour la discrétisation et la mise en oeuvre mais non détaillé dans le cadre de l'exposé.

Résultats numériques

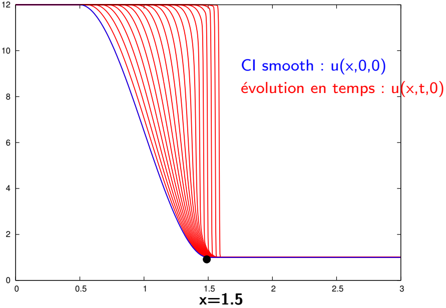
- Choix d'une entropie :

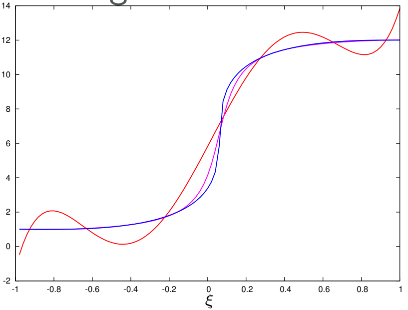
$$\begin{cases} s(u) = \frac{u^2}{2} & v(u) = u \\ s(u) = -ln(u-u_-) & v(u) = -\frac{1}{u-u_-} \\ s(u) = -ln(u-u_-) - ln(u_+ - u) & v(u) = -\frac{1}{u-u_-} + \frac{1}{u_+ - u} \end{cases}$$

- Choix de u_+ et u_- $\longrightarrow$ contrôle du domaine de définition de u(v).
- Résultats :

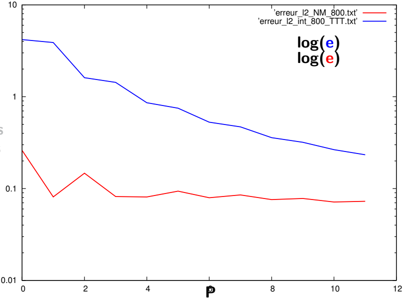


Convergence en ordre P





x=1.5, t=0.085<Tc, P=5
analytique
entropie n^o 2
intrusive



x=1.5, t=0.085<Tc

$$e = \int \left(u_{ex}(x,t,\xi) - \sum_{i=0}^{P} u_i(x,t)\phi_i(\xi)\right)^2 d_w\xi$$

$$e = \int \left(u_{ex}(x,t,\xi) - u\left(\sum_{i=0}^{P} v_i(x,t)\phi_i(\xi)\right)\right)^2 d_w\xi$$

Dynamique des gaz compressibles eulérienne

G. Poëtte

- Système de la dynamique des gaz compressibles eulérienne : la variable principale est $(\rho, \rho u, \rho e)^t$:

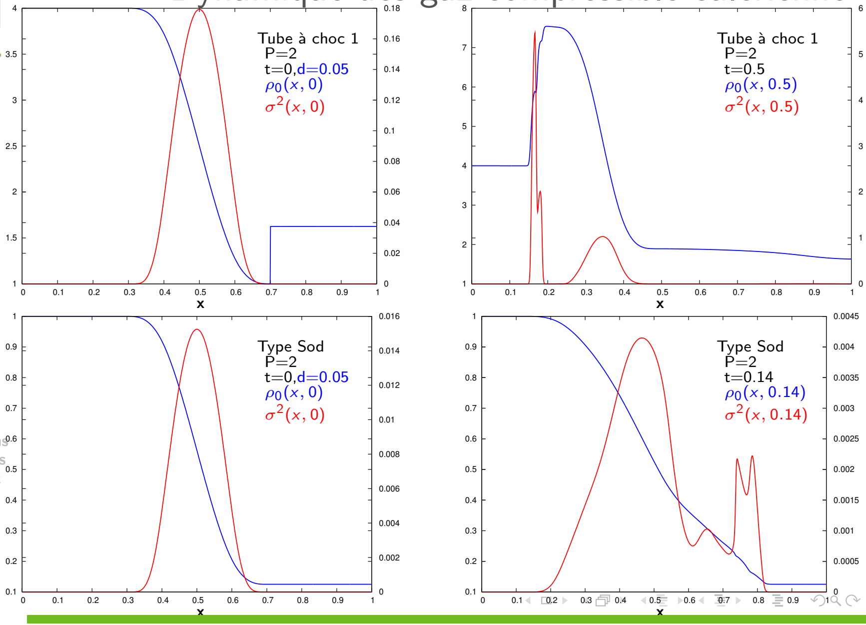
$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) = 0, \\ \partial_t(\rho e) + \partial_x(\rho u e + p u) = 0. \end{array} \right.$$

- Difficulté :
  - Phénomène de Gibbs.
  - Système $\Longrightarrow$ schéma numérique.
- Nouveau changement de variable $w = (\sqrt{\rho}, \sqrt{\rho} u, \sqrt{\rho}(e + \frac{p}{\rho}))^t$:
  - J'ai montré que ce changement de variable est compatible avec schéma de Roe.
  - Propriétés $w \neq$ propriétés $v = (-\frac{\mu}{\epsilon}, \frac{u}{\epsilon}, -\frac{1}{\epsilon})^t$.
- Problème numérique : $(\sqrt{\rho})_k = \int \phi_k \sqrt{\sum_{i=0}^{P} \rho_i \phi_i} dw$.

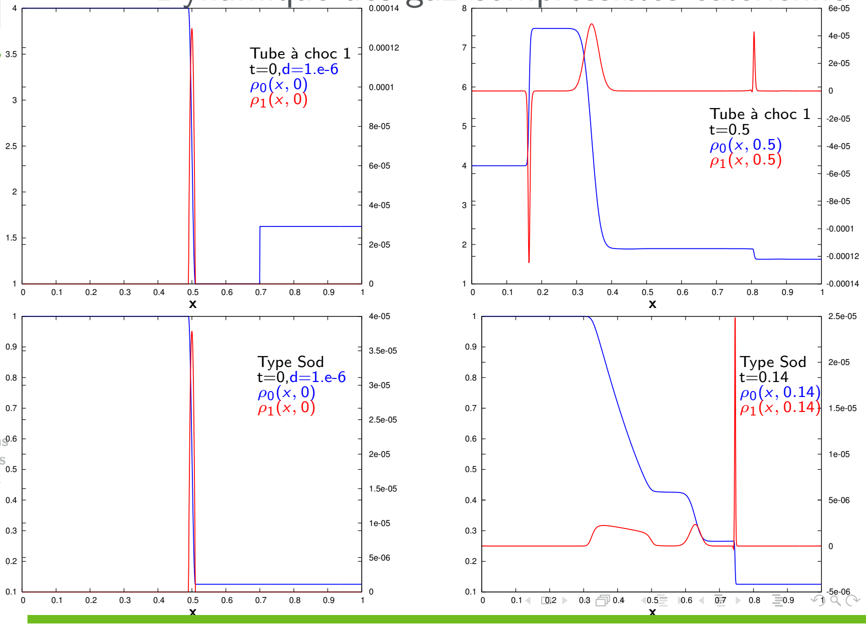
$\Longrightarrow$ Quelques résultats par la méthode utilisant le changement de variable en w.

Dynamique des gaz compressible eulérienne

G. Poëtte



Dynamique des gaz compressibles eulérienne



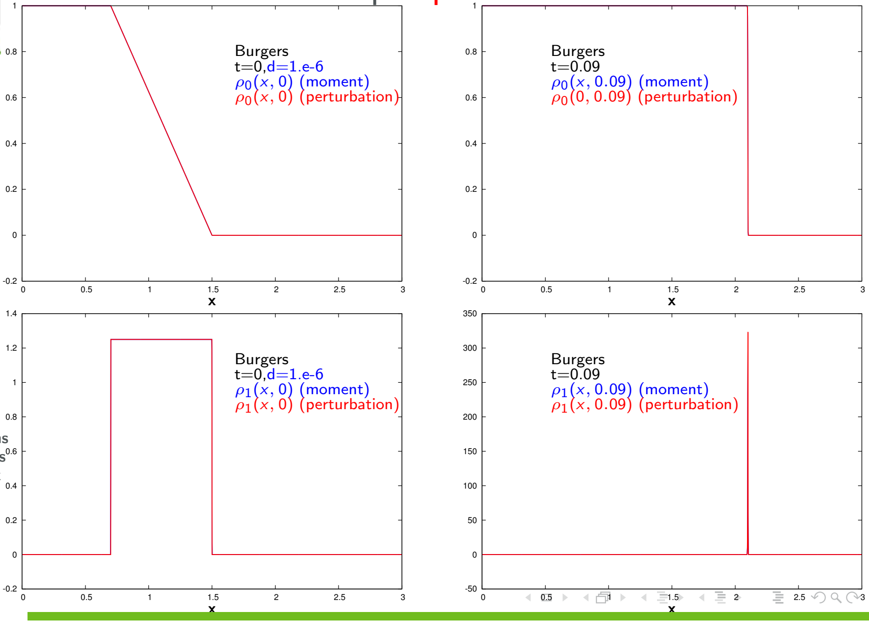
Parallèle Perturbation vs. Moments polynomiaux

Soit $\mathbb{S}$ le système de lois de conservation initial considéré (Burgers, ddg,...)

- Méthode par perturbation :
  - perturbation infinitésimale de u (Taylor) $\Longrightarrow u(\xi) \approx \overline{u}_0 + \sum_{i=1}^{P} \frac{\overline{u}_i \xi^i}{i!}$.
  - Injection du développement de u dans $\mathbb{S}$.
  - Identification des coefficients des $(\xi^i)_{i\in\{0..P\}} \Longrightarrow$ système perturbé $\overline{\mathbb{S}}^P$.
- Méthode aux moments polynomiaux :
  - incertitude ξ de **variance** d $\left((\phi_i^d)_{i\in\mathbb{N}} \text{ sa base associée}\right) \Longrightarrow u(\xi) \approx u_0 + \sum_{i=1}^{P} u_i \phi_i^d(\xi)$.
  - $\Longrightarrow$ système aux moments $\widetilde{\mathbb{S}}_d^P$.
- J'ai montré que $\left\{ \begin{array}{c} \widetilde{\mathbb{S}}_d^P \\ \text{lorsque la variance } d \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \overline{\mathbb{S}}^P \right\}$ $\forall$ $\mathbb{S}$ système initial.
  $\Longrightarrow$ La méthode polynomiale contient la méthode par perturbation (perturbation 1D de l'écoulement de base).

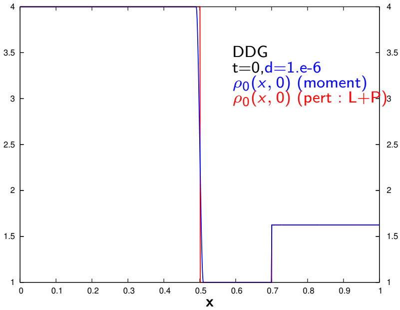
Ceci étend les résultats de Xiu,Karniadakis 2004

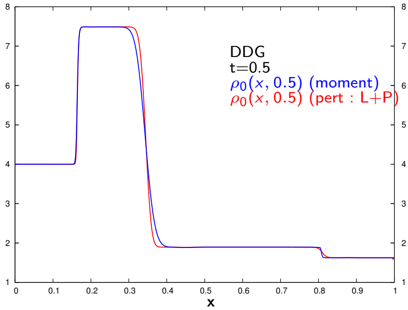
Méthodes par perturbations vs. moments

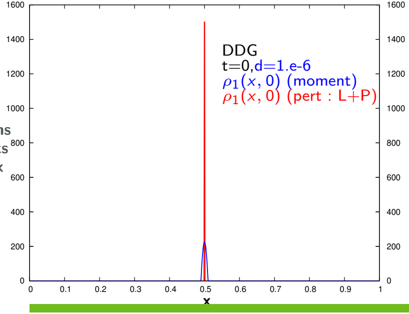


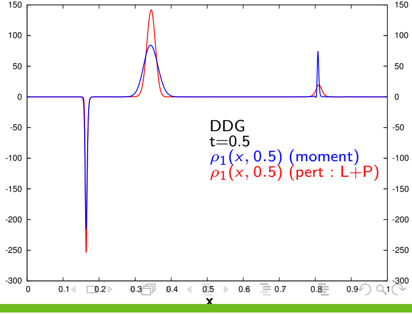
Tube à choc 1 : perturbations vs. moments

G. Poëtte









Conclusion

- Bilan :
  - Mise en évidence du fait que les problèmes spécifiques à l'UQ (phénomène de Gibbs) sont "agravés" par les problèmes spécifiques à la mécanique des fluides compressibles (chocs).
  $\Longrightarrow$ **ex : éventuelle apparition de densité négative**
  - Grâce à un lien avec la thermodynamique rationnelle (Ruggeri-Müller) cela montre que les nouveaux systèmes tronqués sont hyperboliques (mathématiquement bien posés) et qu'il est possible de contrôler le phénomène de Gibbs.
  $$\Longrightarrow \boxed{v(x,t,\xi) = \sum_{i=0}^{P} v_i(x,t)\phi_i(\xi)}$$
  - Cela met en évidence un parallèle entre les méthodes de perturbation et les méthodes aux moments polynomiaux.
  $\Longrightarrow$ Approche aux moments polynomiaux $\supset$ Approche par perturbation
  - La nouvelle méthode mise au point est conservative par construction pour tout ordre polynomial (vérifié jusqu'à P=14).
- Perspectives :
  - 1 seule dimension stochastique mais possibilité de généraliser.
  - Méthode permet utilisation de points de quadrature (EOS tabulées...).
  - Travail en cours sur la dynamique des gaz compressibles en coordonnées lagrangiennes.
  - Travail sur la base polynomiale (pdf $f_x(\xi)$?).
  - Nouvelle façon d'aborder les perturbations dans le cadre non linéaire ?
  - Couplage de modes en méthodes de perturbation ?