OPTIMISATION MULTICRITERE STOCHASTIQUE

Michel DUMAS, Gilles ARNAUD, Fabrice GAUDIER

CEA/DEN/DM2S/SFME/LETR

michel.dumas@cea.fr gilles.arnaud@cea.fr

fabrice.gaudier @cea.fr

Introduction

L 'optimisation

multicritère

stochastique

Optimisation monocritère

Problème d'optimisation

$$f : D \rightarrow R \qquad\qquad \min_{x \in D} f(x) = f_{min}$$

$$\forall x \in D \qquad f_{\min} \leq f(x)$$

Optimisation **continue** : $D \subset R^n$

Optimisation **combinatoire** :

D est un ensemble fini :

$$D \equiv \{0,1\}^n, D \subset N, D \equiv S^n$$

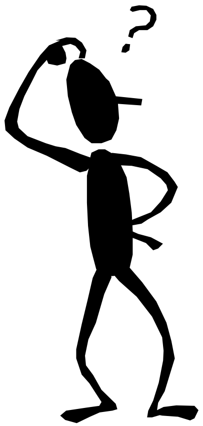
Optimisation multicritère

Problème d'optimisation multicritère

$$f : D \to R^p$$

$$\min_{x \in D} f(x) = \min\left\{ \ f_1(x), f_2(x), \ldots, f_p(x) \ \right\}$$

La notion d 'optimum global :

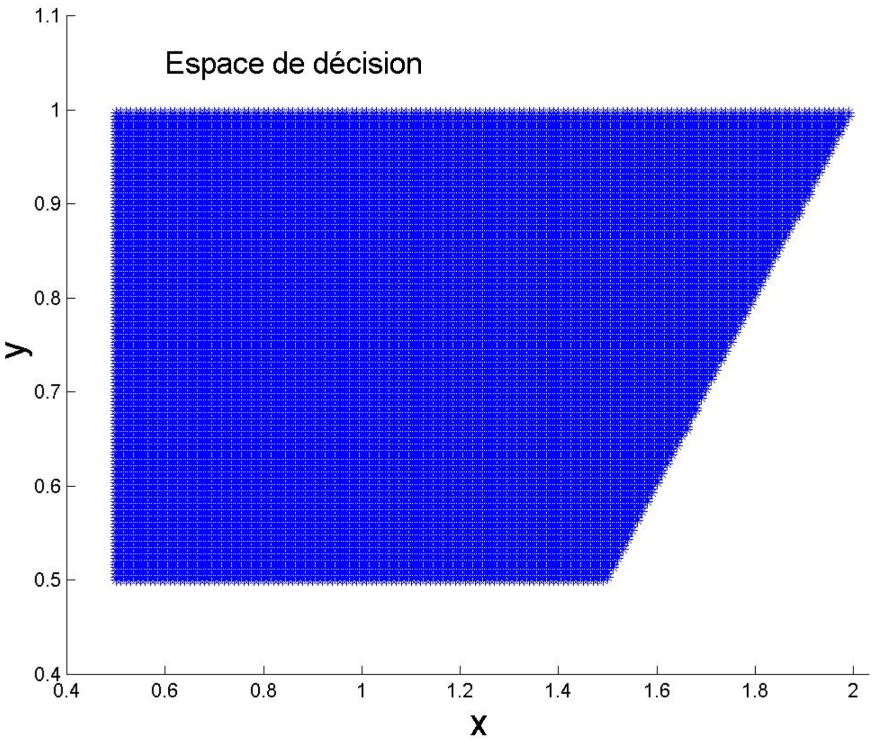


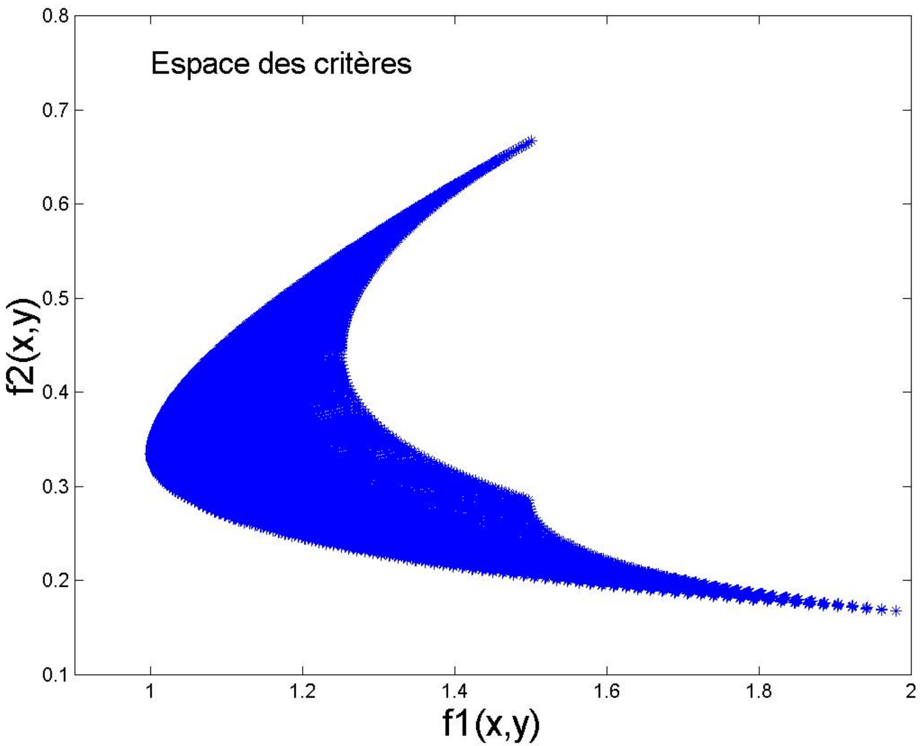
$$\forall x \in D \quad f_{\min} \leq f(x)$$

n'a plus de sens !

$\leq$ n'est pas une relation d'ordre totale dans R^p

Exemple





$$0.5 \le x \le 2,\ 0.5 \le y \le 1,\ x \le y+1$$

$$f_1(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + 1$$

$$f_2(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}$$

Relation de dominance

On définit une **relation de dominance** entre solutions :

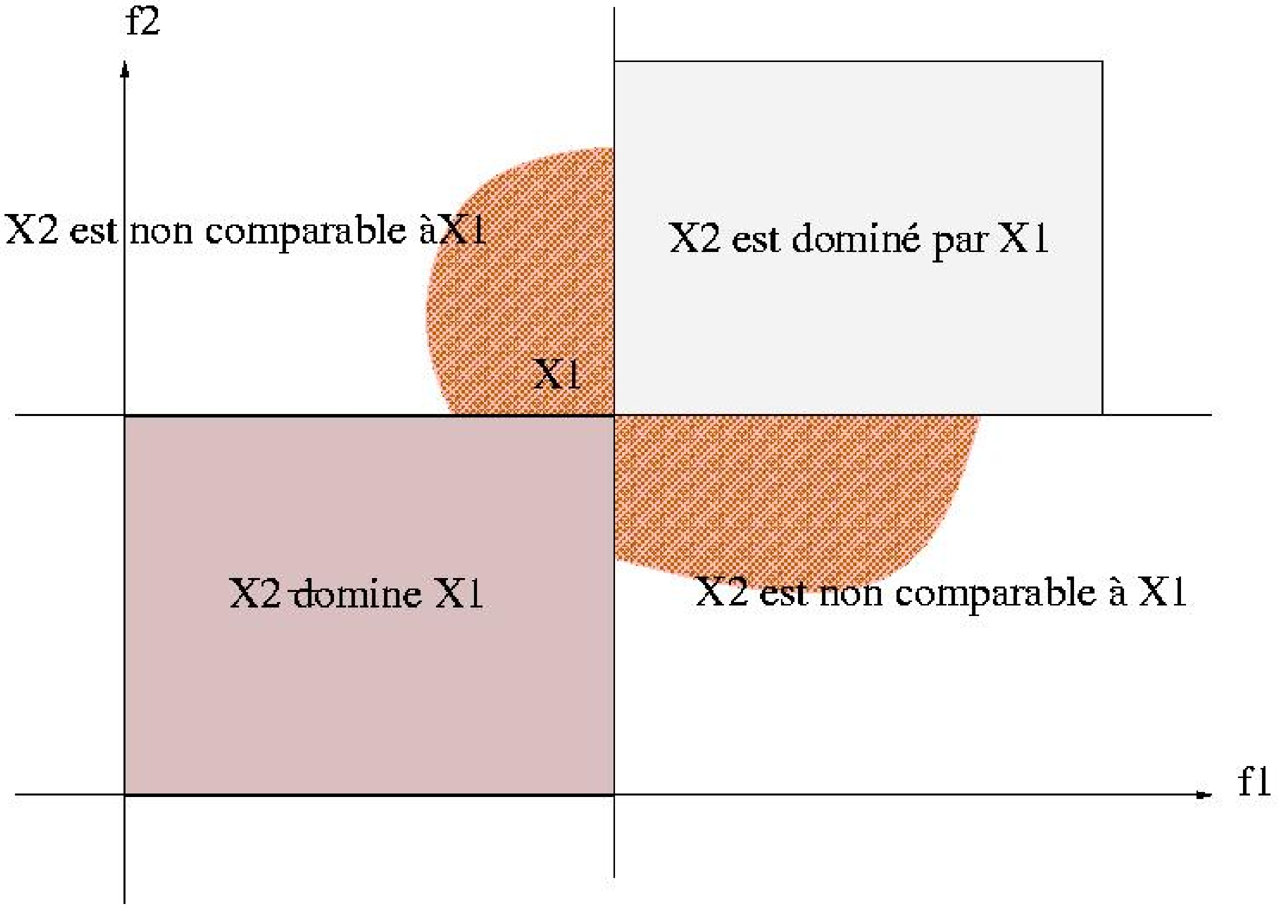
$$x1 \in A \ \text{ domine } \ x2 \in A \ \text{ ssi} :$$

$$1.\ \forall j \in \{1, p\} \quad f_j(x1) \leq f_j(x2)$$

$$2.\ \exists j_0 \in \{1, p\} \quad f_{j0}(x1) < f_{j0}(x2)$$

Si une des conditions est violée x1 ne domine pas x2

Relation de dominance



Pareto-optimalité

Optimalité au sens de Pareto

Si une solution n 'est dominée par aucune autre

elle est **optimale au sens de Pareto**.

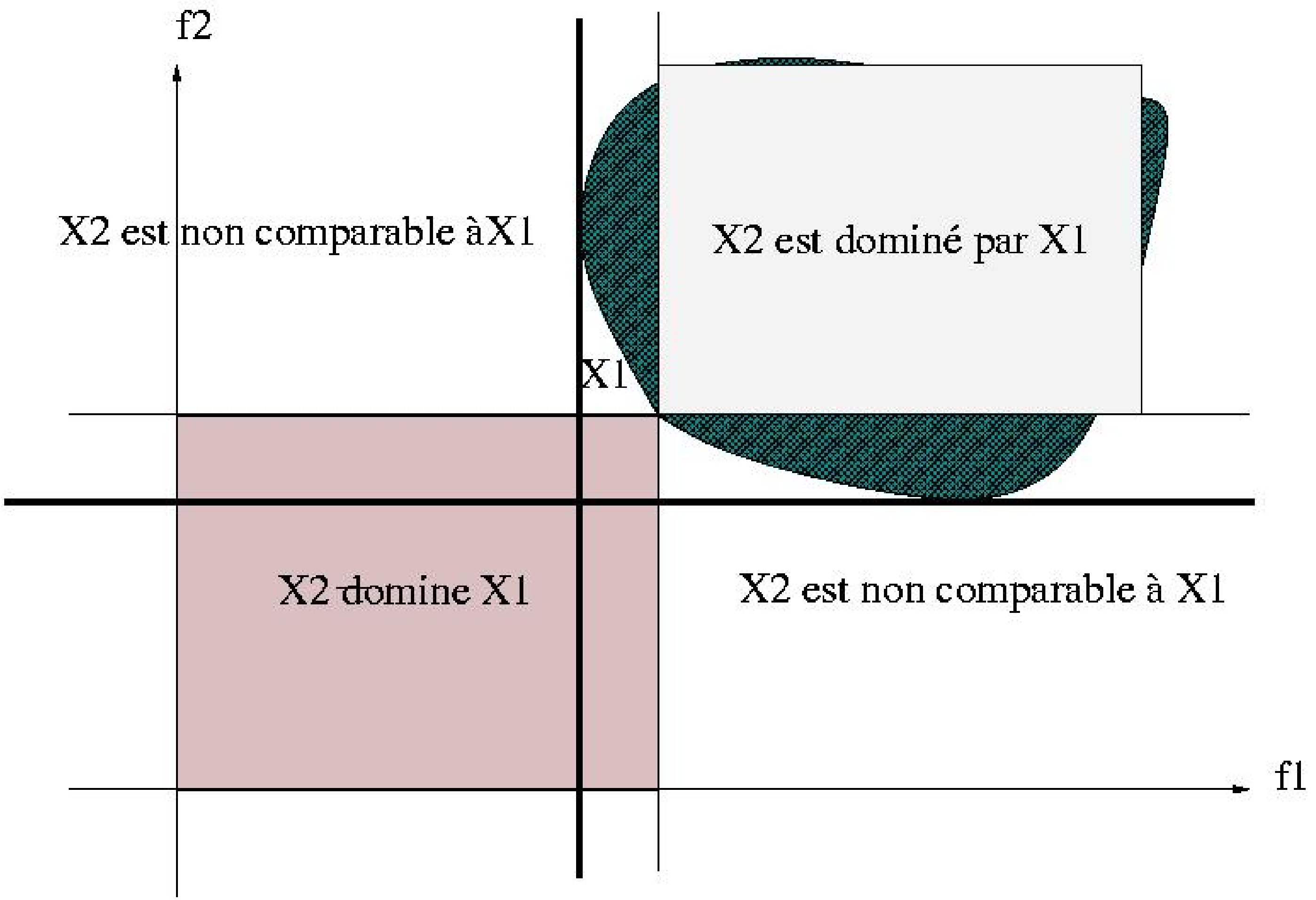
L 'ensemble des solutions **non dominées** i.d. celles qui dominent les autres mais ne se dominent pas entre elles sont Pareto-optimales.

Elles forment Z : la **zone de Pareto** $Z \subseteq A \subseteq R^n$

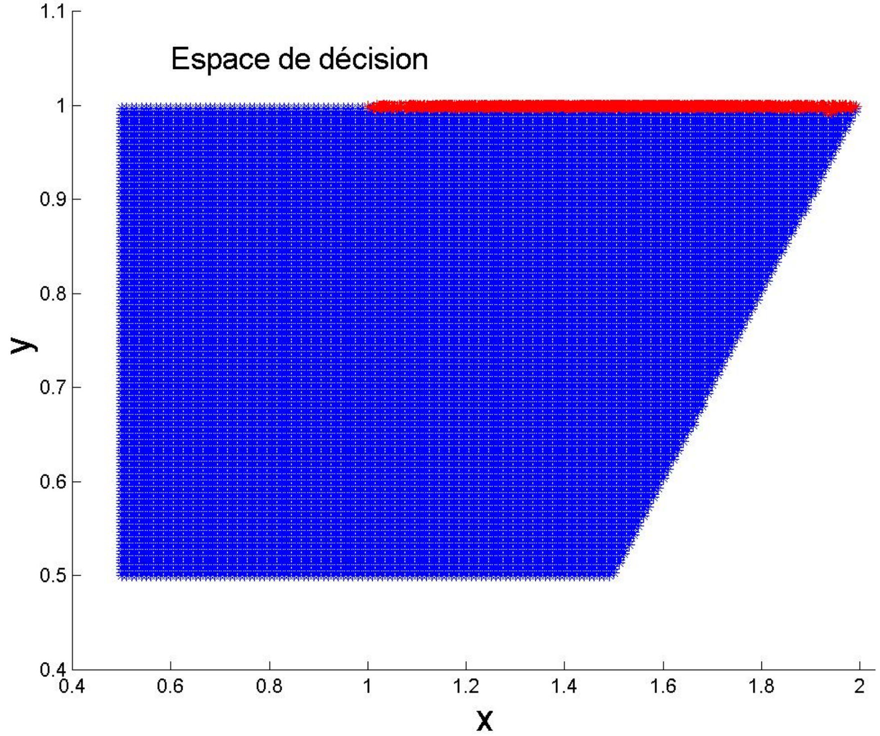
L 'image de Z dans l 'espace des critères R^p est

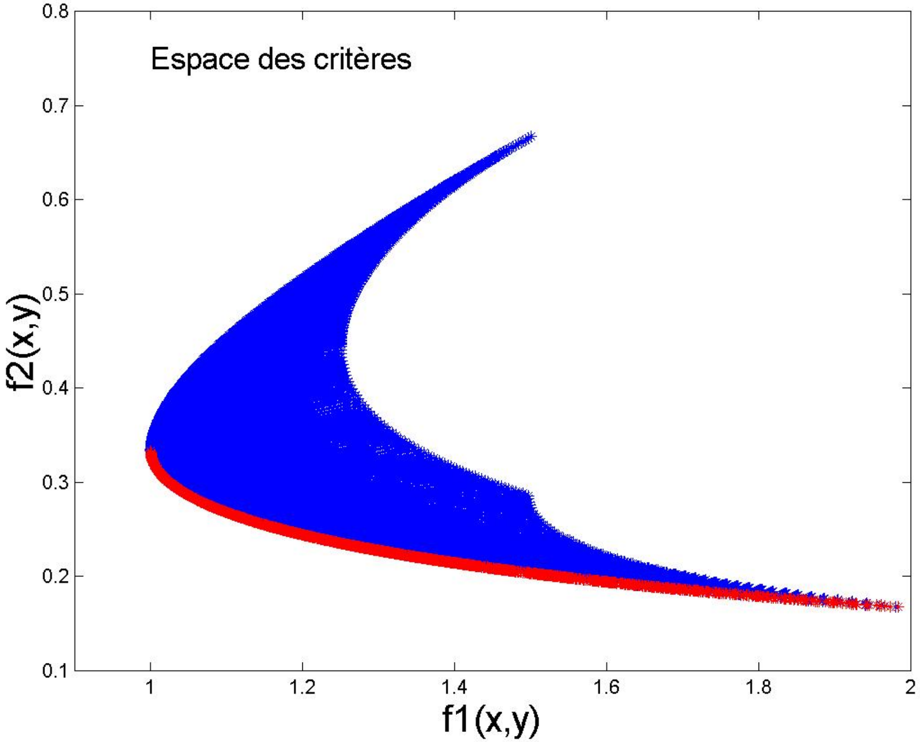
le **front de Pareto**

Pareto-optimalité



Exemple





$$0.5 \le x \le 2,\ 0.5 \le y \le 1,\ x \le y + 1$$

$$f_1(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + 1$$

$$f_2(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}$$

Nouvelles méthodes

A nouveaux problèmes, nouvelles solutions

Les métaheuristiques :

Recuit simulé, recherche tabou, colonies de fourmis, les algorithmes évolutionnaires (génétiques), etc. . . . .

- s 'attaquent aux problèmes « difficiles »
- évitent le piège des minima locaux
- fournissent des ensembles de solutions
- présentent un caractère stochastique

Les Algorithmes « évolutionnaires »

Métaphore biologique :

L ’évolution d ’une population d ’individus

Au cours des générations :

Sélection « naturelle » => « adaptation » des individus

Mesure de l ’adaptation :

La « fitness » => les objectifs de l ’optimisation

Propriétés :

- définir une relation d ’ordre partiel entre individus
- être évaluable.

Les Algorithmes « évolutionnaires »

Les opérateurs génétiques :

La mutation

On altère aléatoirement une partie du chromosome

=> Permet d 'éviter les mimima locaux.

Le croisement

On combine les chromosomes de deux parents

=> Permet de partager l 'information

La sélection des parents :

Stratégie élitiste

Optimisation multicritère

$$f : D \to \boldsymbol{R^p} \;,\; D \subset R^n$$

$$\min_{x \in D} f(x)$$

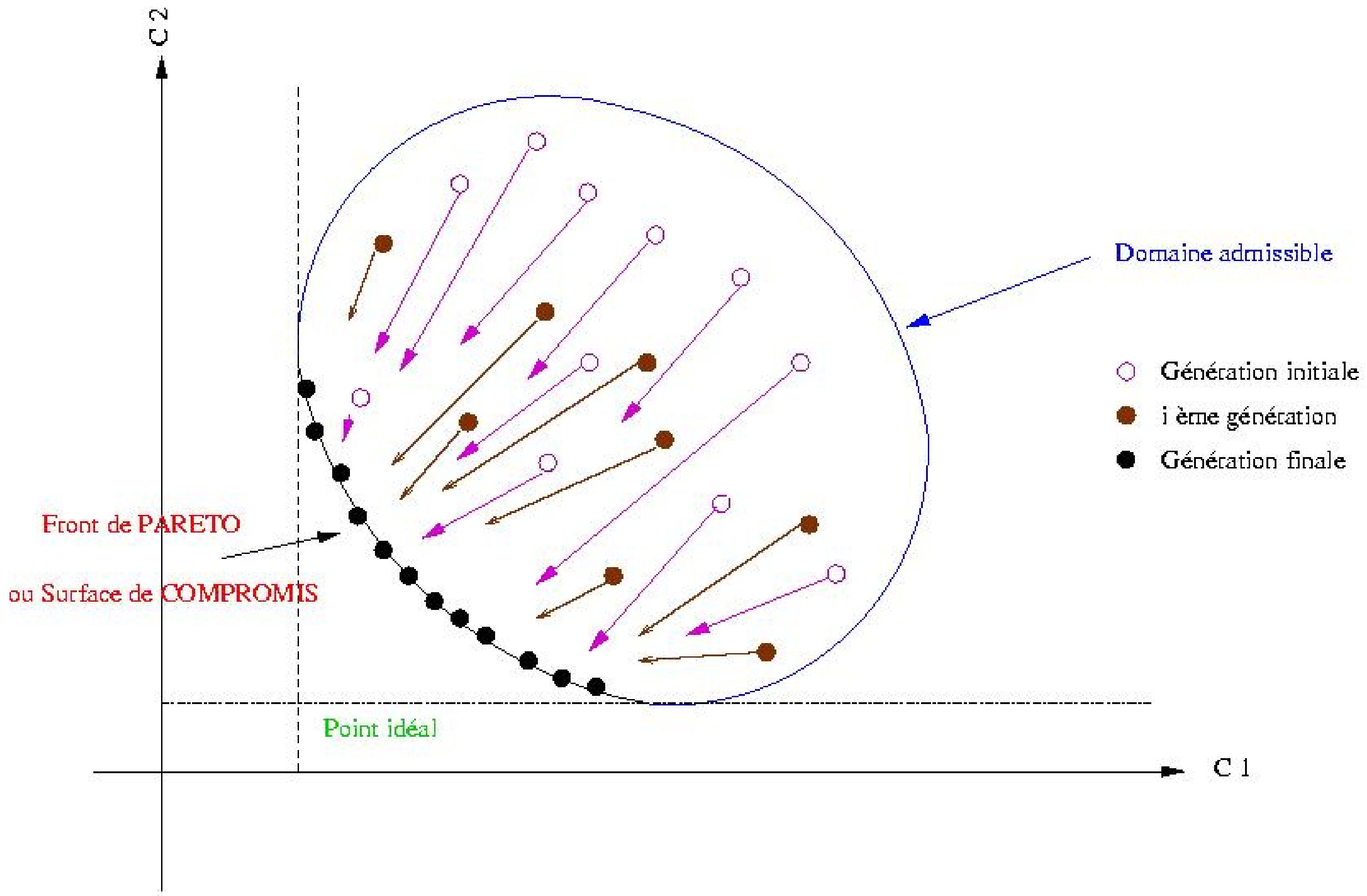
$$\text{où} : f(x) = \left\{ f_1(x), f_2(x), \ldots, f_p(x) \right\}$$

La « fitness » de x :

rang de x = nombre d 'éléments qui dominent x dans la population courante

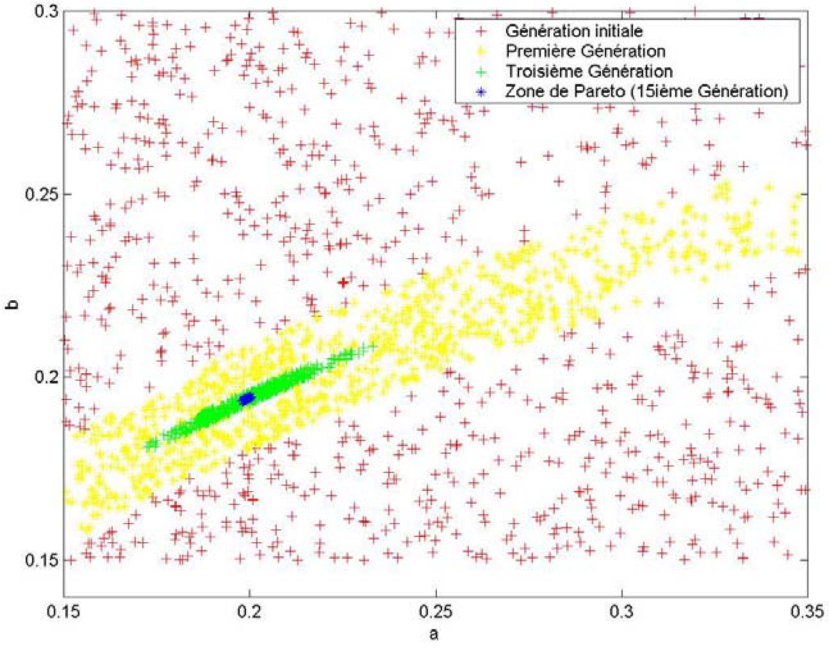
Zone de Pareto = { x de rang 0}

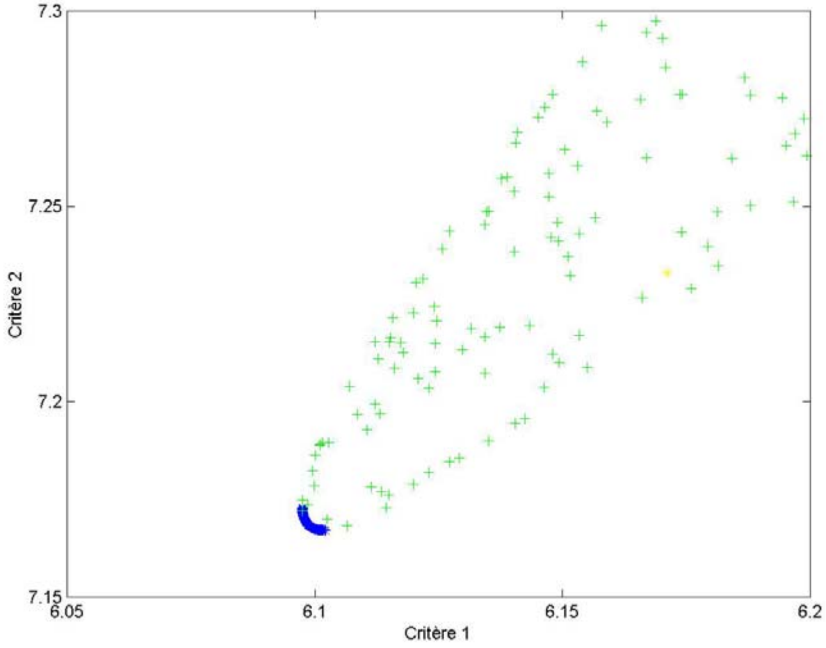
Population pareto-optimale



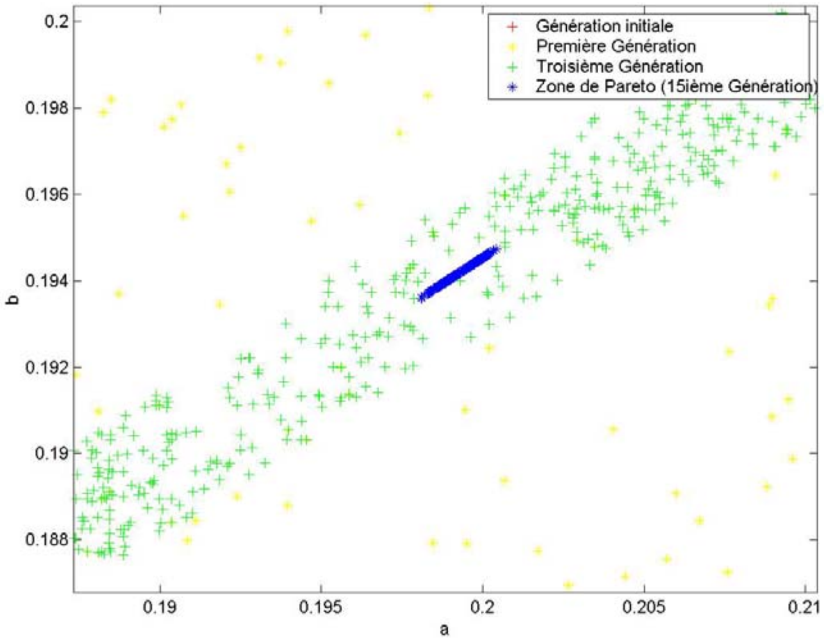
CONVERGENCE DE LA POPULATION VERS LE FRONT DE PARETO

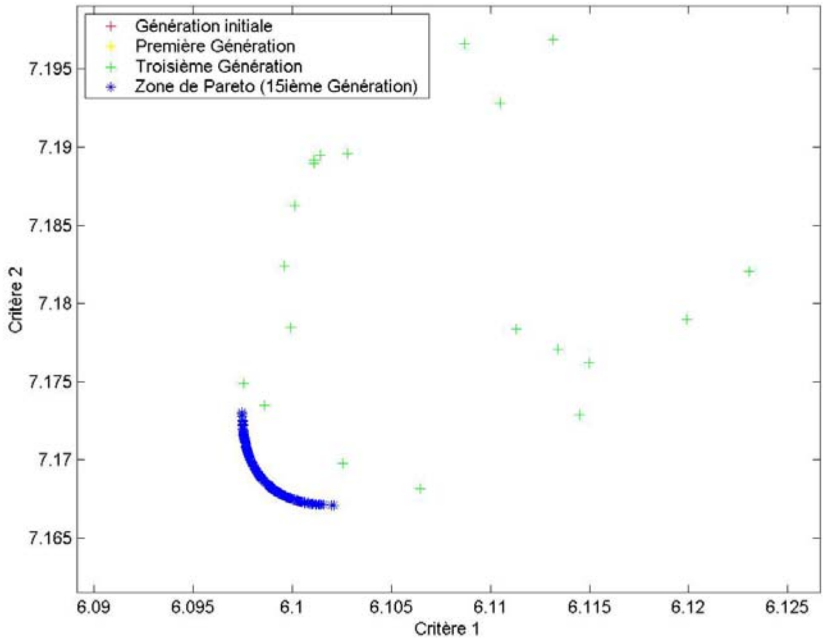
Convergence de la population



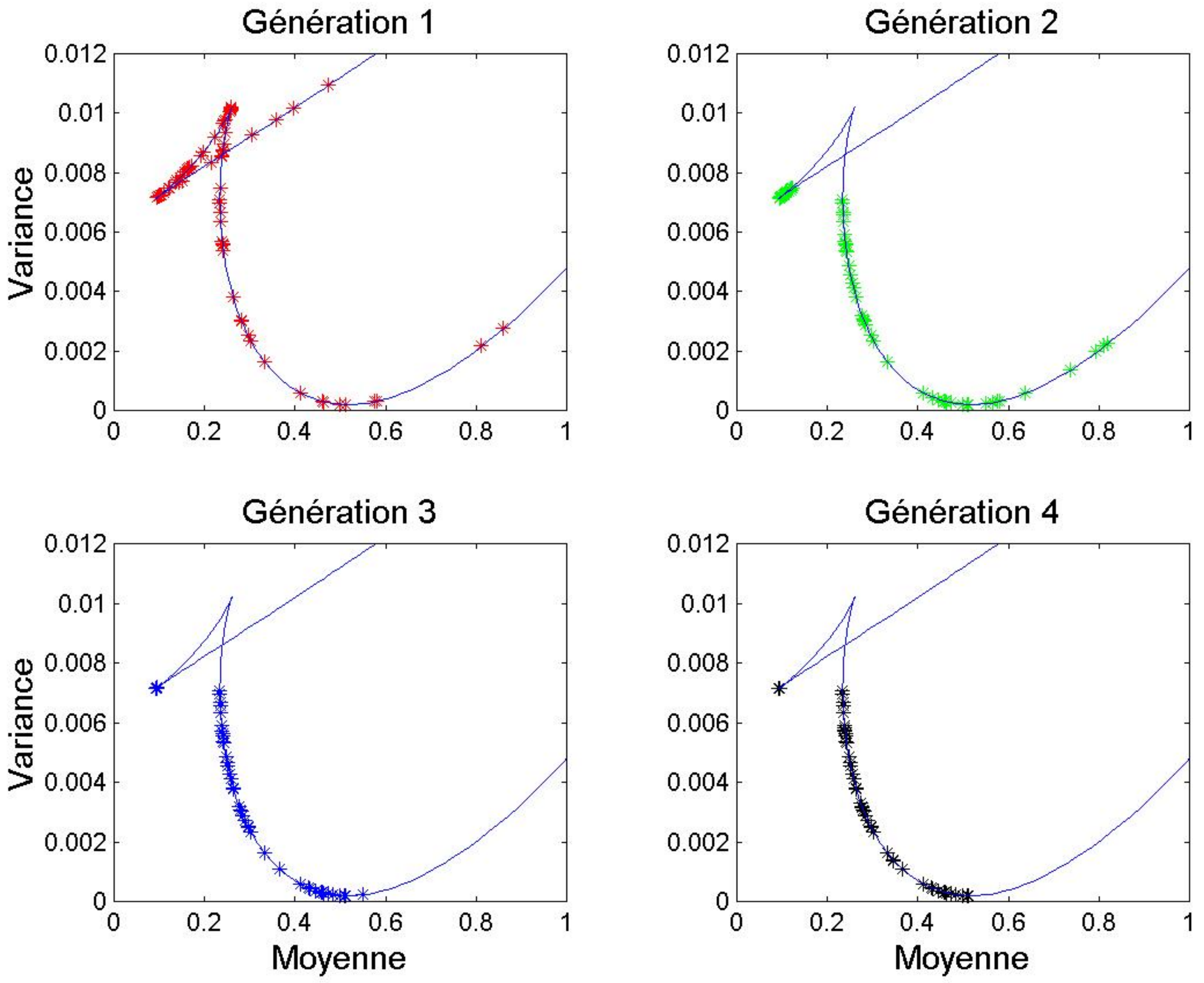


Convergence de la population





Autre exemple



Optimisation stochastique

Optimisation en présence d 'incertitudes :

$$f : D \to \boldsymbol{R} \quad , D \subset R^n$$

$$\min_{x \in D} f(x)$$

$$avec : f(x) = f(a, x)$$

$$o\grave{u}$$

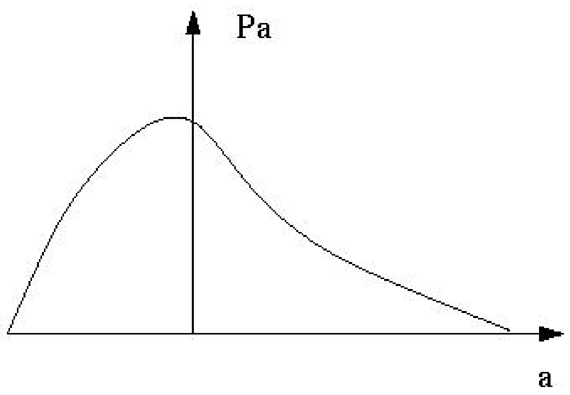
$$a = \{ \ param\grave{e}tres \quad incertains \ \}$$

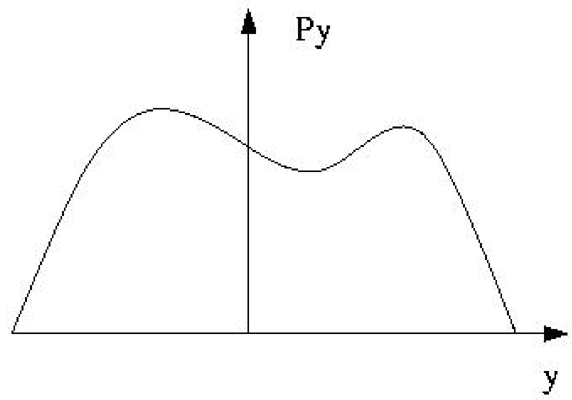
Les paramètres incertains a sont modélisés comme des variables aléatoires A de distribution de probabilité connue

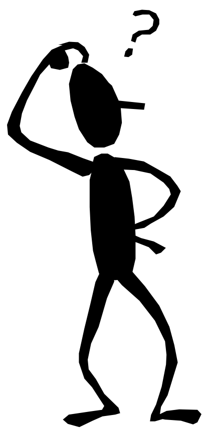
Optimisation stochastique

x : variables de décision déterministes → $y = f(a,x)$ → *y : valeur du critère*

a : paramètres incertains → $y = f(a,x)$







Le critère ***f(a,x)*** => une variable aléatoire $\boldsymbol{Y_A(x)}$

! ! min $\boldsymbol{Y_A(x)}$ ***n 'a plus de sens ! !***

Optimisation stochastique

On se ramène à un problème d 'optimisation bien posé :

1. Problème déterministe associé : $\min f(\overline{a}, x)$
2. Problème monocritère :

   On choisit un des critères caractérisant la densité de probabilité de $Y_A(x)$

$$-\,Moyenne \quad \mathrm{E}\left(Y_A(x)\right)$$
$$-\,Variance \quad Var(Y_A(x))$$
$$-\,\mathrm{Pr}\,ob(y_A(x) \geq y_{\mathrm{lim}})$$

Optimisation stochastique

3. Problème multicritère

On choisit :

- Plusieurs des critères caractérisant la densité de probabilité de $Y_A(x)$
- Plusieurs des critères caractérisant la densité de probabilité de plusieurs objectifs (variables aléatoires) caractérisant les performances du système.

4. Problème de satisfaction de contraintes :

$$Trouvez\left\{ x \in D \,\middle|\, \Pr ob(Y_A(x) \leq \varepsilon) \geq \alpha \right\}$$

5. etc . . .

Exemple d 'application: Calibration d'un modèle

Source de l 'incertitude : *les mesures expérimentales*

- On mesure 6 grandeurs physiques

$$a = \{a_1, a_2, . . . , a_6\}$$

permettant d'évaluer y(a) (« valeur mesurée »)

en chacun des $Ness$ (= 48) points expérimentaux :

=> On les modélise par 6 variables aléatoires.

- Les paramètres (phénoménologiques) $x = \{x_1, x_2\}$ du modèle sont les variables de décision à déterminer.

Optimisation stochastique

- En chaque point expérimental, l'écart :

$e(A_i,x)$ = valeur calculée $y^*(A_i,x)$ - valeur mesurée $y(A_i)$
est une variable aléatoire.

- Toutes fonctions de ces variables aléatoires mesurant les écarts sur les 48 points expérimentaux sont des variables aléatoires.

- En particulier, les normes L_1 et L_2 que nous avons choisi d'étudier :

$$F_1(A_1, A_2, \ldots, A_{Ness}, x) = \frac{1}{Ness} \sum_{i=1,Ness} \left| e_i(A_i, x) \right|$$

$$F_2(A_1, A_2, \ldots, A_{Ness}, x) = \frac{1}{Ness} \sum_{i=1,Ness} (e_i(A_i, x))^2$$

Optimisation stochastique

Méthode de résolution :

« External Sampling Method »

- On construit un échantillon de taille N respectant les distributions de probabilité des 6 variables aléatoires en chacun des 48 points expérimentaux.

- Pour tout couple $\{x_1, x_2\}$ des paramètres du modèle on peut calculer les réalisations de e(a,x) et obtenir les distributions empiriques de

$$F_1(A_1, A_2, \ldots, A_{Ness}, x) \; et \; F_2(A_1, A_2, \ldots, A_{Ness}, x)$$

Optimisation stochastique

Les différents problèmes traités :

- Minimisation de la norme L_1

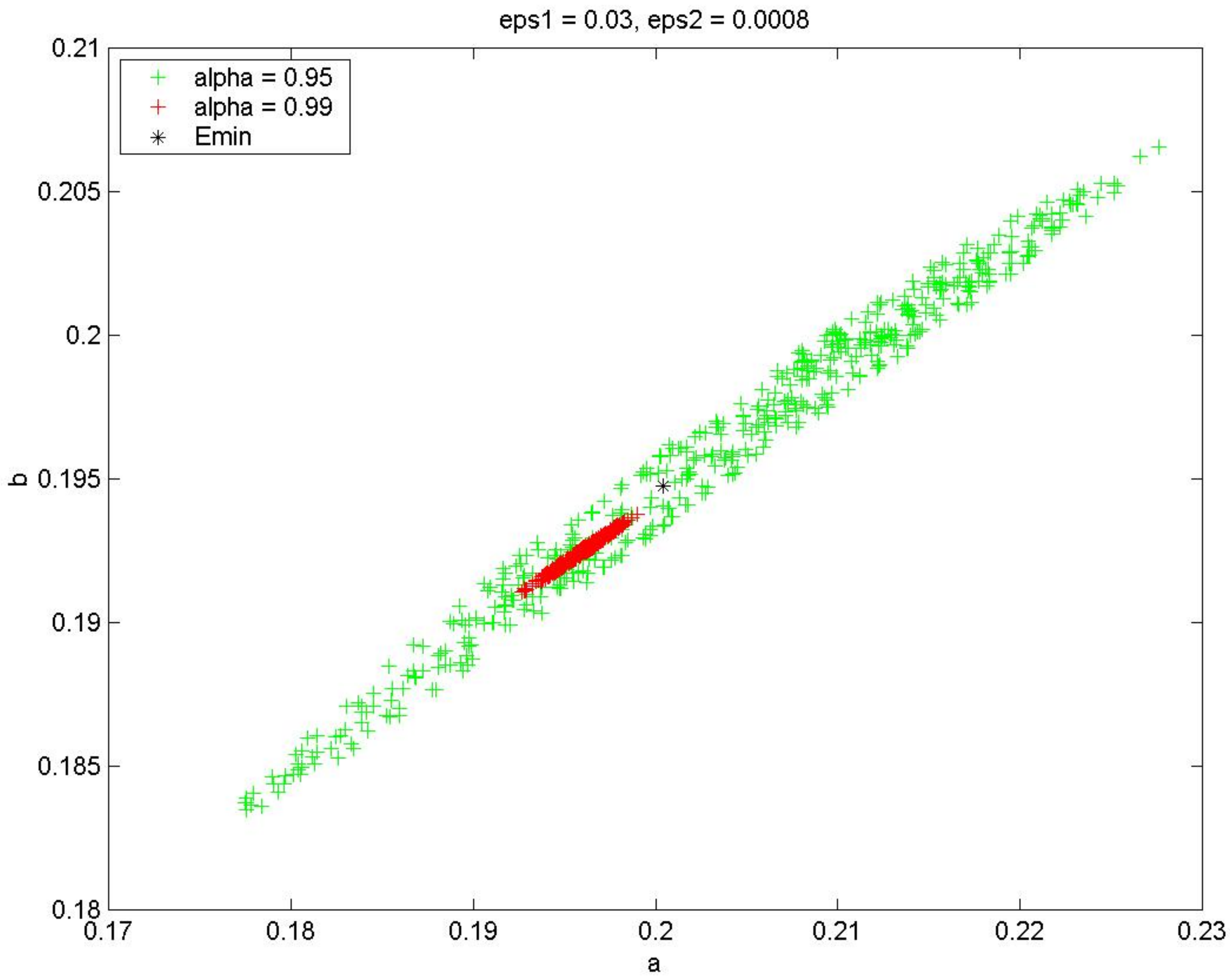
$$\begin{cases} \min E[F_1(A_1, A_2, \ldots, A_{Ness}, x)] \\ \min Var[F_1(A_1, A_2, \ldots, A_{Ness}, x)] \end{cases}$$

- Minimisation de la norme L_2

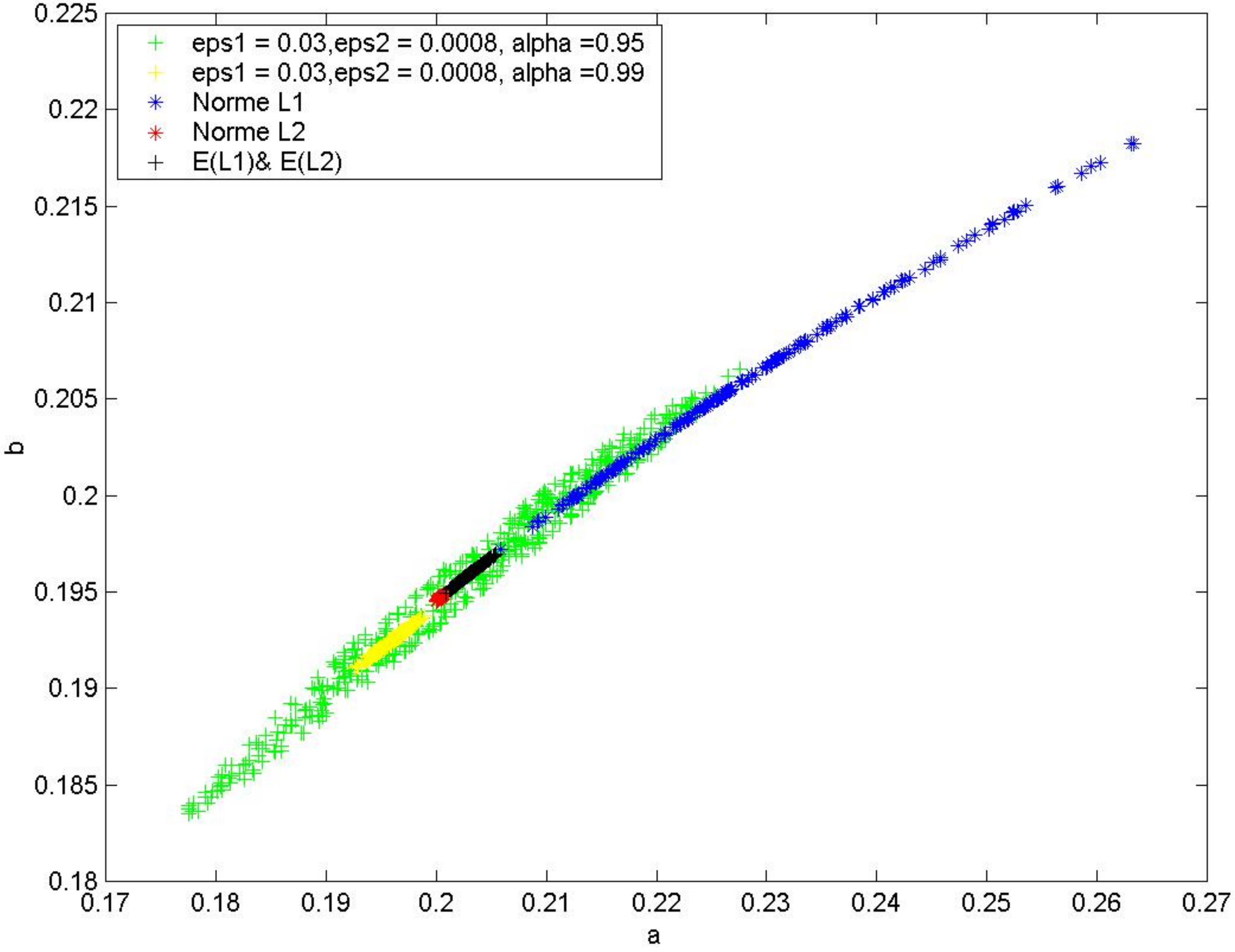
- Ensemble des points qui vérifient :

$$\begin{cases} \Pr ob(F_1(A_1, A_2, \ldots, A_{Ness}, x) \leq \varepsilon_1) \geq \alpha \\ \Pr ob(F_2(A_1, A_2, \ldots, A_{Ness}, x) \leq \varepsilon_2) \geq \alpha \end{cases}$$

Optimisation stochastique



Optimisation stochastique



Difficultés

Bonne représentation
de la zone et du front de Pareto

Bonne répartition des points

Population de taille suffisante

=> Nombreuses évaluations des critères

> Approximation

Réseaux de neurones

> Distribution des calculs

CCRT, Clusters de PC

Conclusion

Les **métaheuristiques :**

nouvelles méthodes

population solution

=> nouveaux problèmes

satisfaction de contraintes

optimisation multicritère

=> nouvelle approche :

- solution à ε près
- optimisation stochastique

Références

Notre implémentation des A.G. :

VIZIR : AG diploïde à codage réel

- Bibliothèque de fonctions C et de scripts Python. G. G. Arnaud et M. Dumas SFME/LETR/RT/04-013/A
- Mise en œuvre de la distribution

  G. Arnaud SFME/LETR/RT/07-034/A

Présentation du multicritère et des AG :

M. Dumas SFME/LETR/RT/02-027/A

Une application : l 'optimisation stochastique

M. Dumas et F. Gaudier SFME/LETR/RT/03-020/A

Deux exemples de calage de codes

G. Arnaud et al. SFME/LETR/RT/05-047/A

Références

Quelques sites web sur l 'optimisation multicritère et les métaheuristiques :

http://www.lania.mx/~ccoello/EMOO

http://www.afia-france.org/

http://www.roadef.org/

http://www.lifl.fr/~talbi/META

Site web sur l 'optimisation stochastique

http://www.stoprog.org/

Références

Optimisation multiobjectif

Yann COLLETTE et Patrick SIARRY, Eyrolles 2002

Métaheuristiques pour l 'optimisation difficile

Johann DREO, Alain PETROWSKI,

Patrick SIARRY, Eric TAILLARD, Eyrolles 2003

Multi-objective Optimization using Evolutionary Algorithms

Kalyanmoy DEB, Wiley 2001